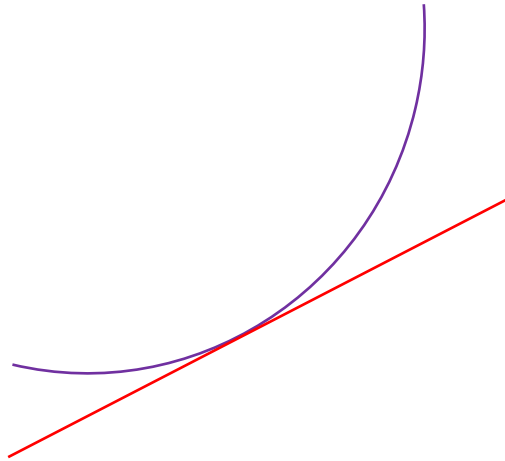


שיטות כמותיות



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר <http://www.gool.co.il> הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: **חדו"א 1**

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4	פרק 1 - פונקציה ממשית
6	פרק 2 - גבול של פונקציה
11	פרק 3 - גזירה של פונקציה
14	פרק 4 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)
16	פרק 5 - כלל לופיטל
19	פרק 6 - חקירת פונקציה
25	פרק 7 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב"
28	פרק 8 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה
29	פרק 9 - בעיות מקסימום ומינימום
39	פרק 10 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)
40	פרק 11 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)
41	פרק 12 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)
42	פרק 13 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)
43	פרק 14 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)
44	פרק 15 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות)
47	פרק 16 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)
56	פרק 17 - שימושי הנגזרת
64	פרק 18 - מטריצות
69	פרק 19 - מטריצות המשך
75	פרק 20 - בעיות גידול ודעיכה
76	פרק 21 - בעיות מינימום ומקסימום כלכליות
77	פרק 22 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר
78	פרק 23 - גיאומטריה אנליטית - המעגל
79	פרק 24 - וקטורים גיאומטריים
80	פרק 25 - וקטורים אלגבריים
81	פרק 26 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות
88	פרק 27 - דטרמיננטות
100	פרק 28 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות
102	נספחים - נוסחאות

פרק 1 - פונקציה ממשית

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \quad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \quad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \quad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \quad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות : $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x-4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :

$$h(h(x)) \quad (6) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(1)) \quad (1)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הוא זוגיות ואיזה זוגיות :

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 1 \quad (3) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \quad y = \ln x + x^2 \quad (7) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = \sin^2 x \quad (4) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = 5 + 3 \sin(4x+1) \quad (2) \quad y = 2 \sin x \quad (1)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = |x-2| \quad (1)$$

* יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

פתרונות

(1)

$$\begin{array}{lllll}
 x \neq 2, -1 \quad (5) & x \neq 0, 1, -1 \quad (4) & x \text{ כל} \quad (3) & x \neq \pm 2 \quad (2) & x \text{ כל} \quad (1) \\
 x < -2 \text{ או } x > 1 \quad (10) & -1 < x < 1 \quad (9) & x \text{ כל} \quad (8) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 \quad (7) & x \geq 4 \quad (6) \\
 x \neq \frac{\pi}{4} \cdot k \quad (15) & x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k \quad (14) & 0 < x \neq 1 \quad (13) & x \text{ כל} \quad (12) & 0 < x \neq 1 \quad (11) \\
 & & -2 < x < 0 \quad (18) & 3 < x < 5 \quad (17) & x \text{ כל} \quad (16)
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lllll}
 x \quad (6) & x - 8 \quad (5) & \frac{4}{x-4} \quad (4) & x^2 - 4 \quad (3) & 4 \quad (2) & -3 \quad (1)
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{llll}
 y \neq 3, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad (3) & y \neq 1, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad (2) & y \text{ כל}, \quad f^{-1}(x) = 3x+1 \quad (1) \\
 & & y \geq -4, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} \quad (4)
 \end{array}$$

(4)

זוגיות - 2, 3, 5, 8 אי זוגיות - 1, 4 כלליות - 6, 7

(5)

$$\begin{array}{llll}
 \pi \quad (4) & 3\pi \quad (3) & \frac{\pi}{2} \quad (2) & 2\pi \quad (1)
 \end{array}$$

(6)

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2) \qquad y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4) \qquad y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

פרק 2 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9) \end{aligned}$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + kx} - x \right) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+2}\right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפורצלת):

$$(a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(11) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד!

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פרק 3 - גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות

$$(2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$(4) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$(6) \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$(8) \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$$(10) \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$(12) \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2}$$

$$(13)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$$

$$(15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right)$$

$$(16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2)$$

$$(17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

$$(18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}}$$

(19)

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

(20)

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

(21)

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

(22)

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}}$$

(27)

(26)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

(28)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

פרק 4 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

- (1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .
- (5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.
- (6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.
- (7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.
- (8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.
- (9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.
 א) $(2, -3)$ $y = x^2 - 2x + 1$ ב) $(-3, 1)$ $y = \sqrt{x}$
- (10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:
 $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.
- (11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.
- (12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.
- (13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות

(1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) משוואת המשיק היא $y = 1$.

(7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

(8) נקודת ההשקה $(1,1)$, $k = 1.5$.

(9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.

ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

(10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$

(11) 71.57°

(12) 71.56°

פרק 5 - כלל לופיטל

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל

לופיטל אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

פתרונות**(1)**

$$\frac{5}{6} (7) \quad \frac{3}{2} (6) \quad \frac{1}{6} (5) \quad 4 (4) \quad n-1 (3) \quad \frac{20}{17} (2) \quad \frac{5}{6} (1)$$

$$2 (14) \quad -\frac{1}{2} (13) \quad \frac{1}{6} (12) \quad \frac{1}{2} (11) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) (10) \quad 1 (9) \quad -\frac{3}{2} (8)$$

$$\frac{1}{2} (21) \quad \frac{1}{2} (20) \quad \frac{1}{6} (19) \quad \frac{a}{b} (18) \quad \frac{a}{b} (17) \quad 1 (16) \quad 1 (15)$$

$$1 (28) \quad 1 (27) \quad -\frac{3}{4} (26) \quad -\frac{1}{2} (25) \quad -\frac{1}{3} (24) \quad \frac{1}{3} (23) \quad \frac{1}{8} (22)$$

$$0 (35) \quad \infty (34) \quad 0 (33) \quad \infty (32) \quad \frac{1}{2} (31) \quad \frac{1}{2} (30) \quad \frac{2}{3} (29)$$

$$0 (42) \quad 0 (41) \quad 0 (40) \quad 0 (39) \quad 0 (38) \quad 0 (37) \quad 1 (36)$$

$$\frac{1}{2} (49) \quad \ln\frac{3}{5} (48) \quad 0.5 (47) \quad 0 (46) \quad 2.5 (45) \quad 6 (44) \quad 0 (43)$$

$$1 (56) \quad e^2 (55) \quad 1 (54) \quad 1 (53) \quad 1 (52) \quad e (51) \quad -\frac{1}{2} (50)$$

$$1 (63) \quad e (62) \quad 1 (61) \quad 1 (60) \quad e^{-1/2} (59) \quad e^{1/3} (58) \quad e^3 (57)$$

$$e^{-1/6} (65) \quad e (64)$$

(2)

$$0.75 (3) \quad 0.25 (2) \quad 1 (1)$$

פרק 6 - חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3) \qquad f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2) \qquad f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6) \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \qquad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9) \qquad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8) \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12) \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11) \qquad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15) \qquad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14) \qquad f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18) \qquad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17) \qquad f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21) \qquad f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20) \qquad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24) \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27) \qquad f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26) \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \quad f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \quad f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

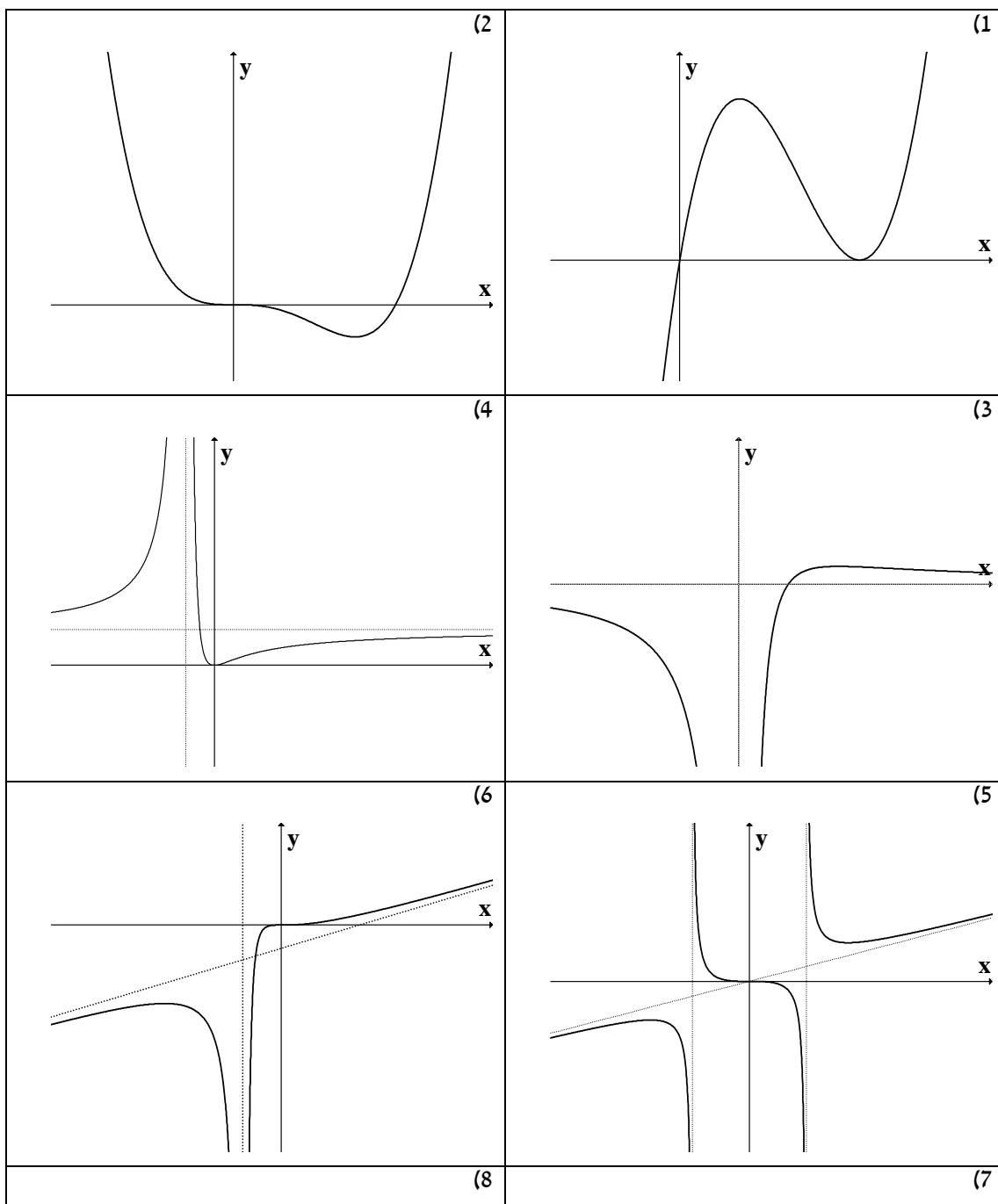
$(0 \leq x \leq 2\pi) \qquad (0 \leq x \leq \pi)$

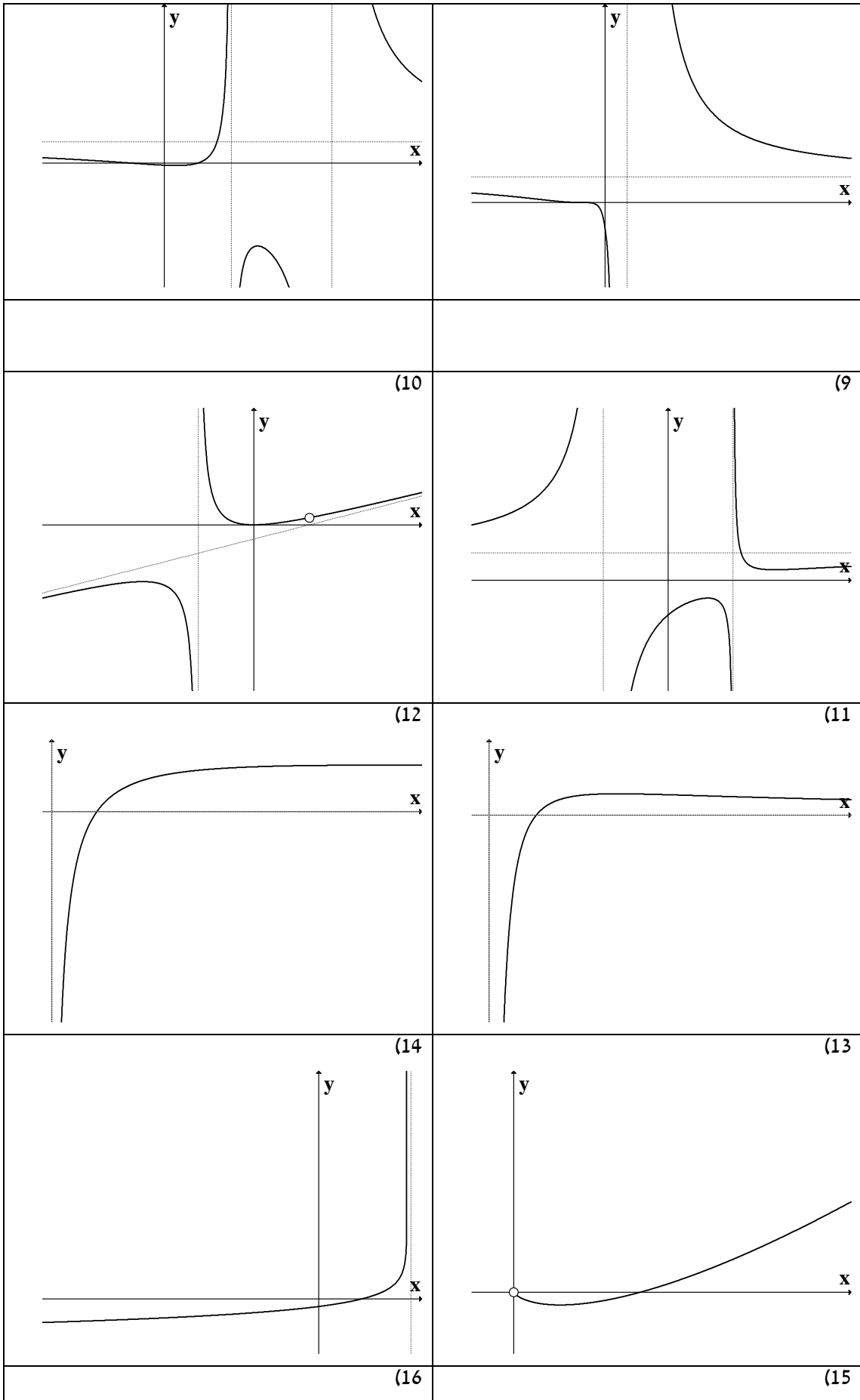
הערות:

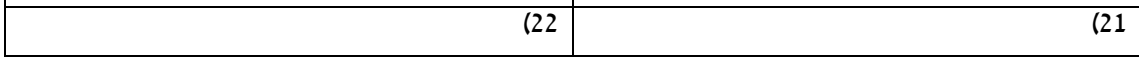
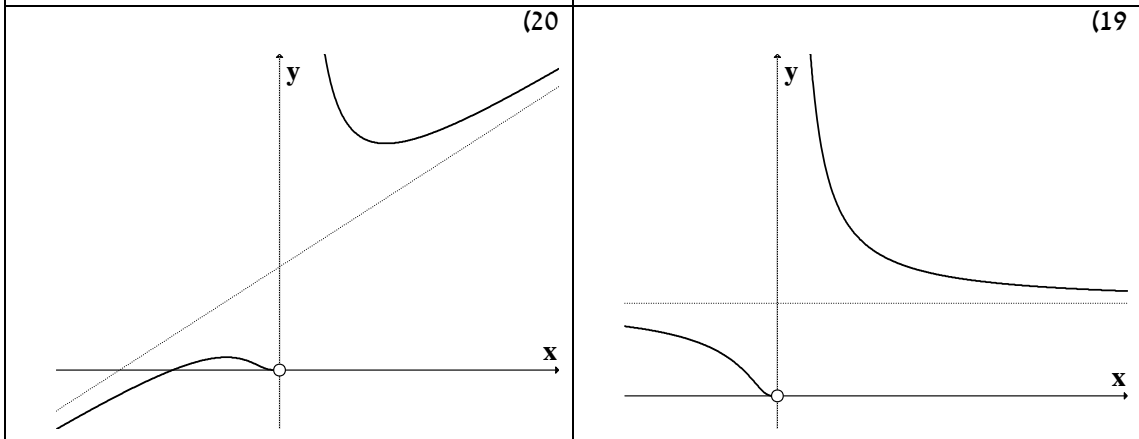
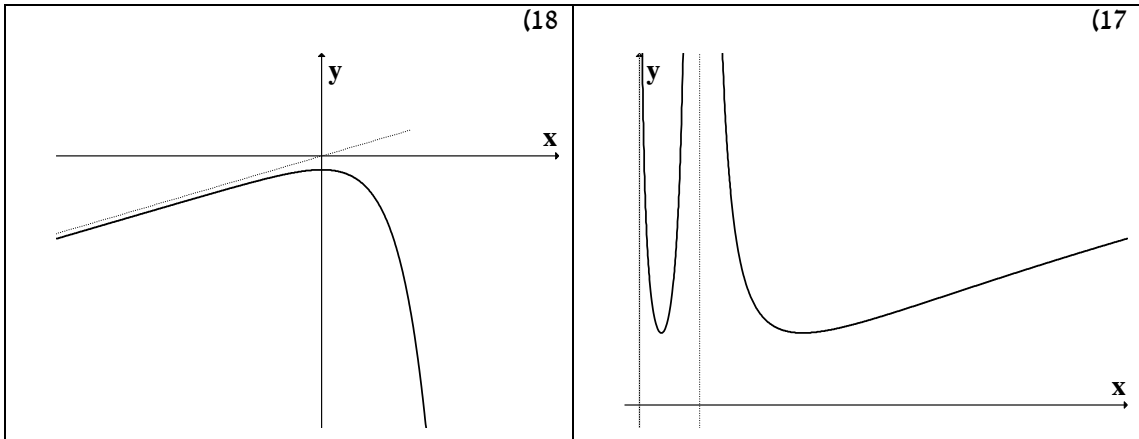
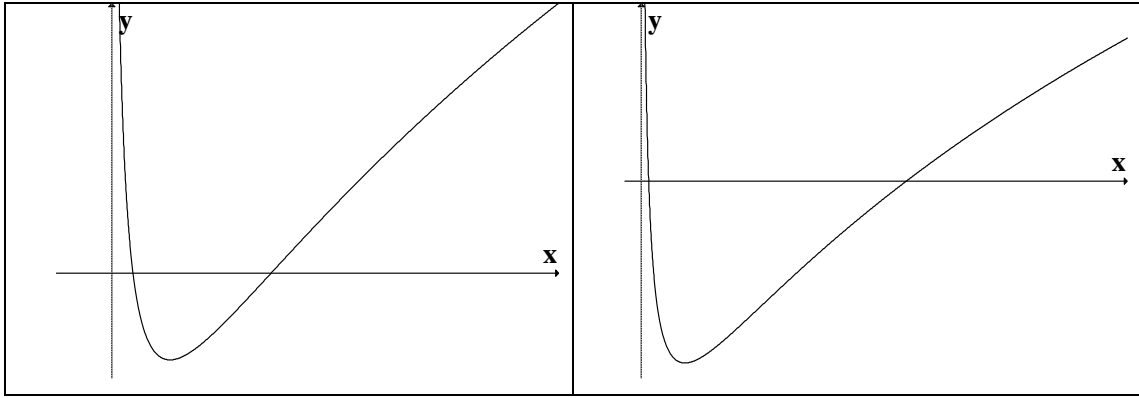
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.
 ** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).
 *** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

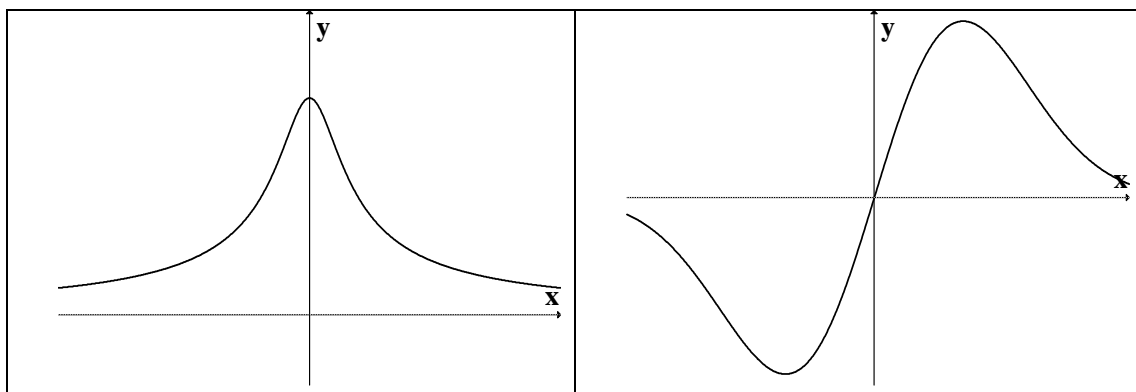
פתרונות

(1)



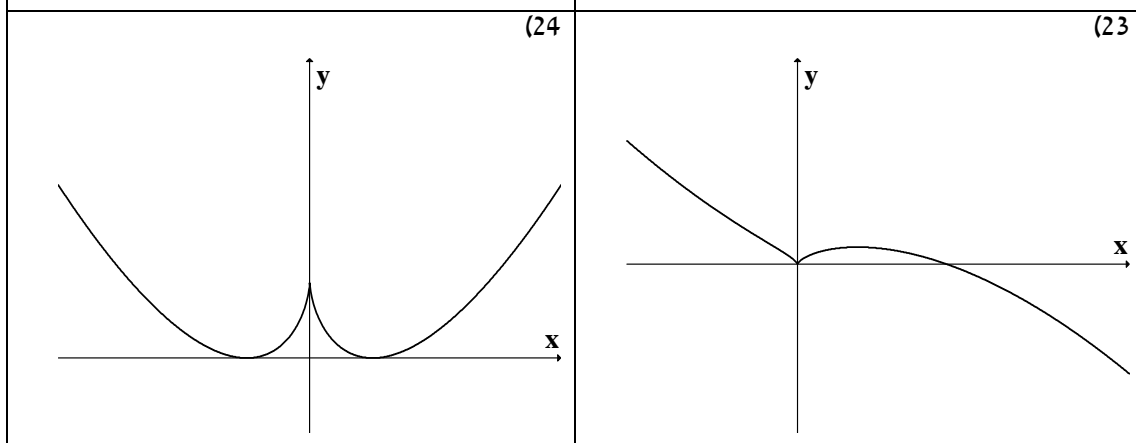






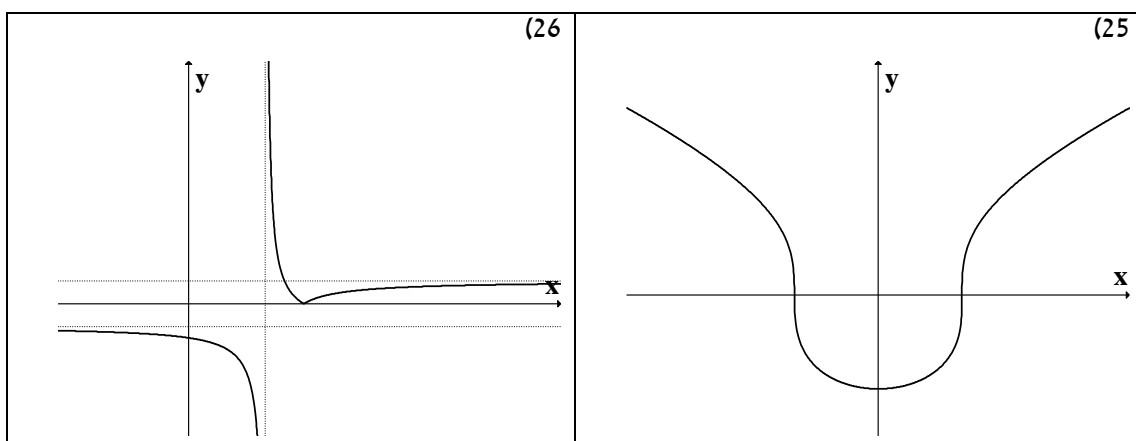
(24)

(23)



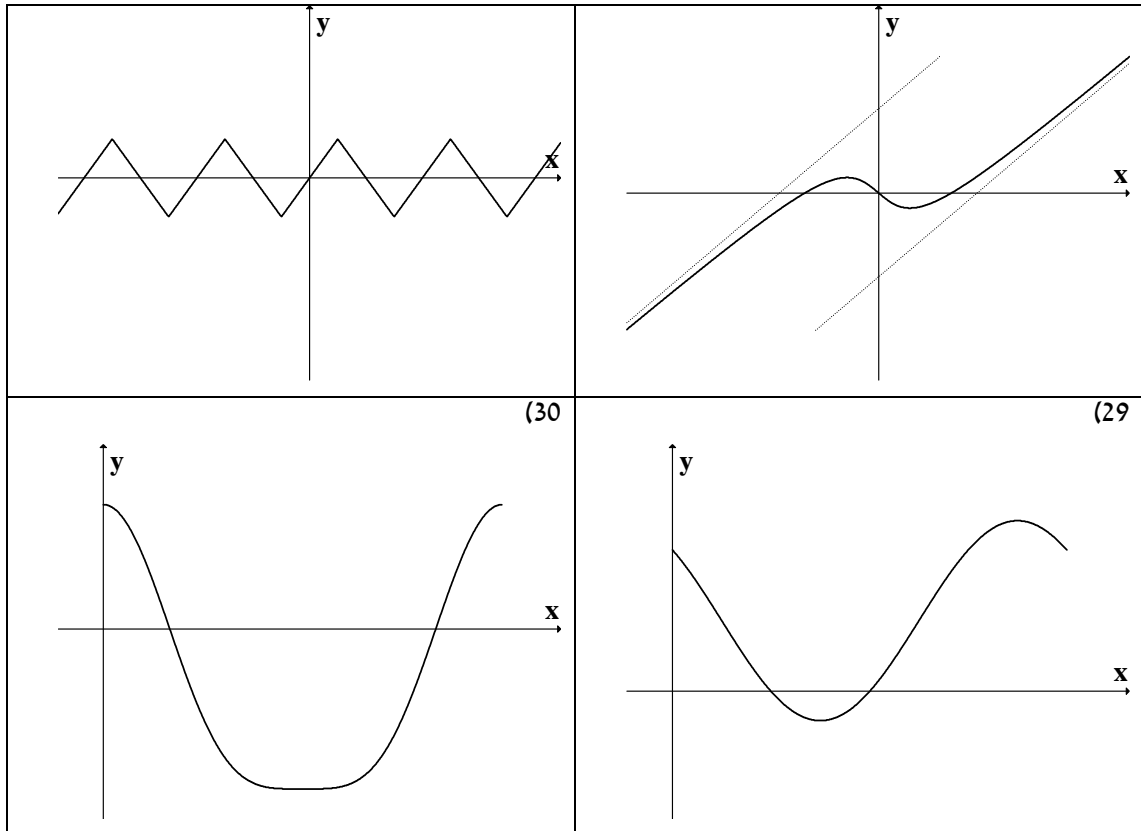
(26)

(25)



(28)

(27)



פרק 7 - חקירת פונקציה - "שאלות מסביב"

(1)

(א) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

(ב) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.

מצא את הקבועים a, b .

(ג) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .

(ד) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול.

מצא את הקבועים a, b .

(ה) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33.

מצא את a .

(ו) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12.

מצא את a, b .

(ז) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(ח) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף

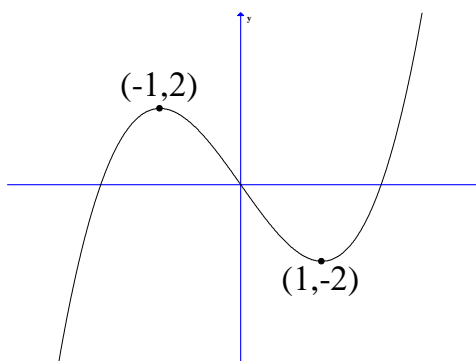
הפונקציה. מצא את a ואת b .

(ט) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$. ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(2) לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
- מצא את התחומים בהם הפונקציה היא ח"ע.



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (2) \quad (0 < x < \frac{\pi}{3}) \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (4) \quad (x \geq 0) \quad \ln(x+1) \leq x$$

פתרונות

(1)

$a = -\frac{1}{3}$ (ג)

$b = 6, a = -4$ (ב)

$a = -\frac{2}{3}$ (א)

$a = \frac{2}{3}, b = -1$ (ו)

$a = 1$ (ה)

$b = 3, a = -1$ (ד)

$a = -7$ (ט)

$a = 0.5$ (ח)

$a = 8$ (ז)

(2)

3 (ג)

2 (ב)

1 (א)

$-2 < k < 2$ (ו)

$k = \pm 2$ (ה)

$k < -2$ או $k > 2$ (ד)

$-1 < x < 1$ או $x < -1$ (ח)

לא (ז)

או $x > 1$

פרק 8 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה

(1) מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2) \quad (-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right) f(x) = \begin{cases} 4x-2 & x < 1 \\ (x-2)(x-3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4) \quad (-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3}(20-x) \quad (3)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6) \quad (-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

(2) הוכח את אי השוויונים שמימין לגבי התחום הרשום בסוגריים משמאל.

$$(x \leq 1) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (3) \quad (x \geq 0) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (2) \quad (x \text{ לכל } x) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (1)$$

פתרונות

(1)

(1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.

(2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.

(3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.

(4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.

(5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.

(6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

(7) אין מקסימום ואין מינימום.

הערת סימון:

$$[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b, \quad (a, b) \Leftrightarrow a < x < b, \quad [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$

פרק 9 - בעיות מקסימום ומינימום

הערה: בפרק זה, סומנו התרגילים הקשים יותר בכוכבית *

בעיות בהנדסת המישור

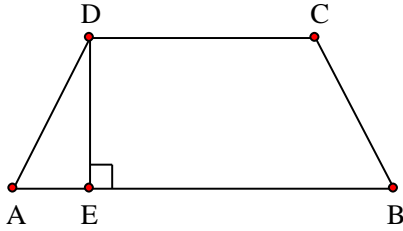
(1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) אורך השוק

הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.

DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז

יהיה מקסימלי?



(2) נתון מלבן ABCD. נסמן ב- x את אחת מצלעות

המלבן (ראה ציור).

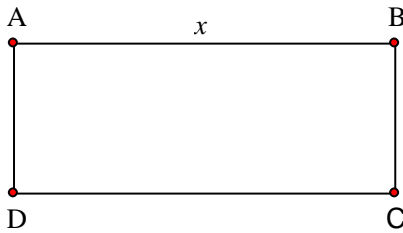
(א) אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x

את שטח המלבן.

(ב) אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכים להיות

אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי

(הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



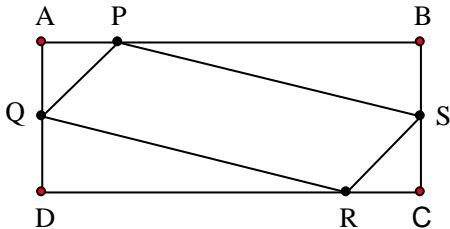
(3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ,

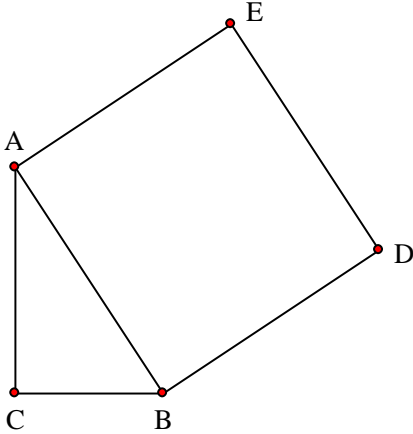
$AB = CD = 10$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים

קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$: (ראה ציור).

מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח

המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?

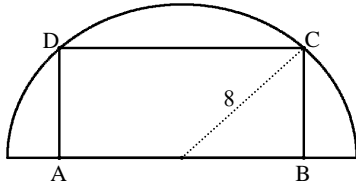




(4)

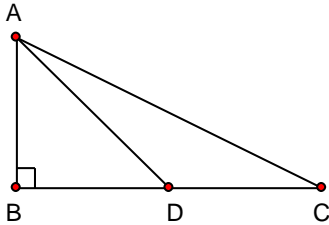
במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.

(5)



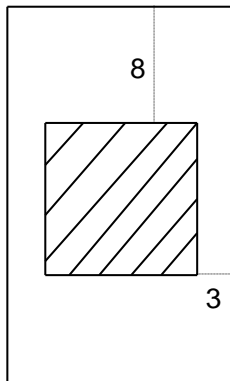
בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

(6)



במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$), סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב BC (ראה ציור). חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.

(7)

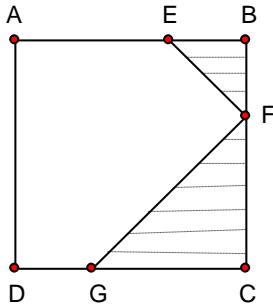


בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר. רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ, ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ. מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד, כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המקווקו בציור).

(8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות

$$= CG, BE = BF \text{ כך ש-} DC, BC, AB, CF$$

(ראה ציור).



נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

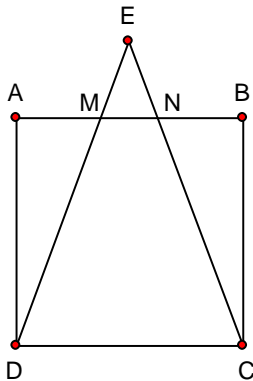
א. סמן ב- x את BF ואת BE, והבע באמצעות x את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG (השטח המקווקו בציור).

ב.1. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

ב.2. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.

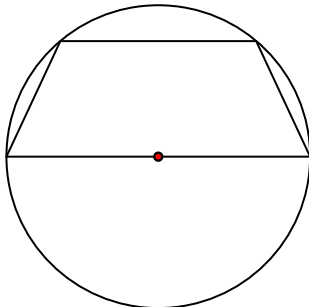
(9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה

כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש ($ED = EC$). שוקי המשולש חותכים את הצלע AB בנקודות M ו-N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים BNC, AMD, EMN יהיה מינימלי.



(10) נתון מעגל שרדיוסו R. במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

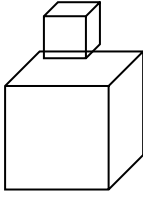
כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו מקסימלי.



בעיות בהנדסת המרחב

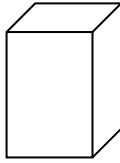
(15) גובהו של "מגדל" הבנוי שמתו קוביות) לאו דווקא

שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע ש
הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי
הקוביות) יהיה מינימלי ?



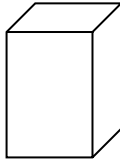
(16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך

צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת
מהדפנות הצדדיות שווה ל- 12 ס"מ. מה צריך להיות
אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



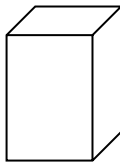
(17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע

ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב
מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות
שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס
וגובה) שנפחה מקסימלי.



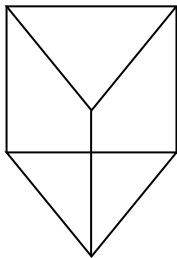
(18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה,

שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך
המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?



(19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת

ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות.
מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע
הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים:
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.



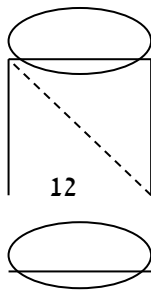
(20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות,



שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

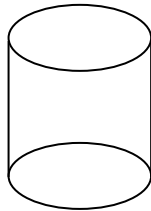
(21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

(22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



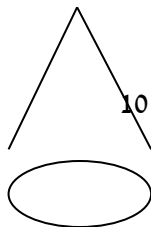
(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק.

המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



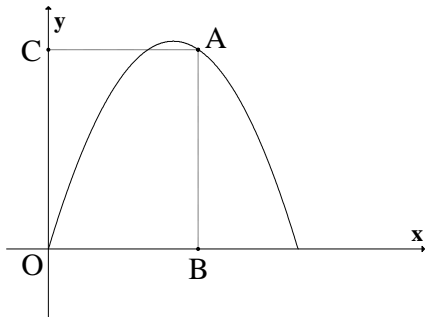
(24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10

ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?



בעיות בפונקציות וגרפים

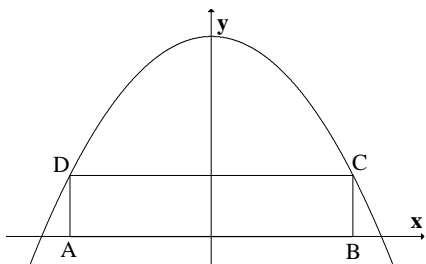
(25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה



, מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).

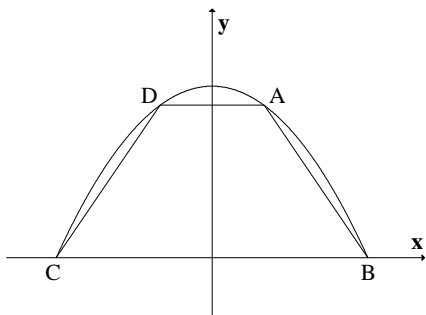
- א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?
 ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?

(26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך



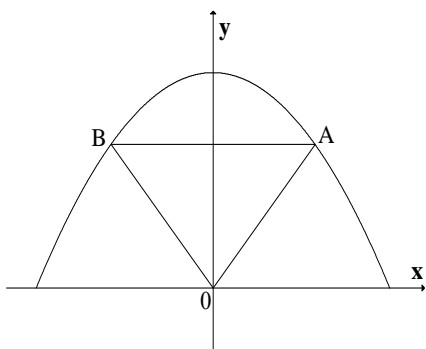
שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).
 מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

(27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$



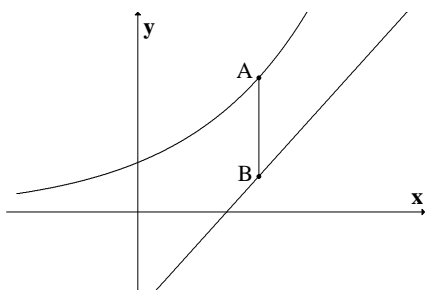
לבין ציר ה-x (ראה ציור).
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?
 ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.

(28) נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה-



x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).
 מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.
 א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?
 ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

(29) לפניך גרף של הפונקציה $y = e^x$ וגרף של הישר



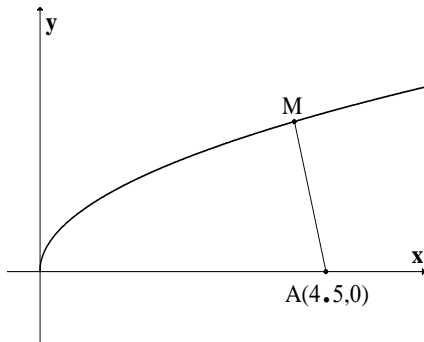
$y = e \cdot x - 2$. ישר המקביל לציר ה-y חותך את

הגרפים בנקודות A ו-B (ראה ציור).

א. מצא לאילו ערכי x אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. האם יש ערך של x שעבורו אורך הקטע AB הוא

מקסימלי?



(31) נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$. על ציר ה- x נתונה

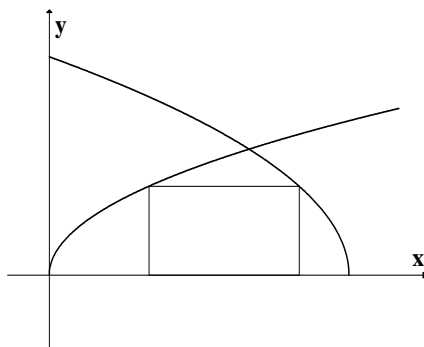
הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).

מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק

AM יהיה מינימלי.

(32) מצא על הישר $f(x) = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה

ביותר לנקודה $(0, 1)$.



(33) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$g(x) = \sqrt{36 - 6x}, \quad f(x) = \sqrt{3x}$$

מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x

כמתואר בציור. מצא את השטח הגדול ביותר

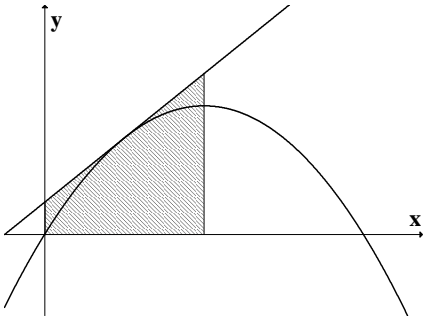
האפשרי למלבן שחסום באופן זה.

(34) דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך

להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי

המשיק והישרים: $x = 0$, $x = 1$ ו- $y = 0$ (השטח

המקוקו שבציור) יהיה מינימלי?



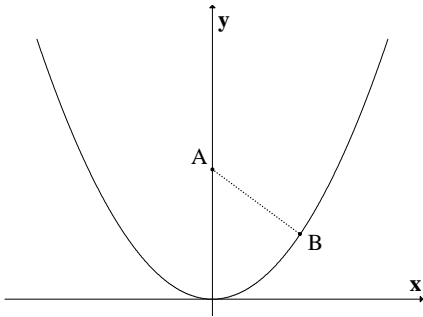
(35) נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע

הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי

$a > 0.5$ (ראה ציור).

א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה המרחק AB הוא מינימלי.

ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי הוא 2.



(36) נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה

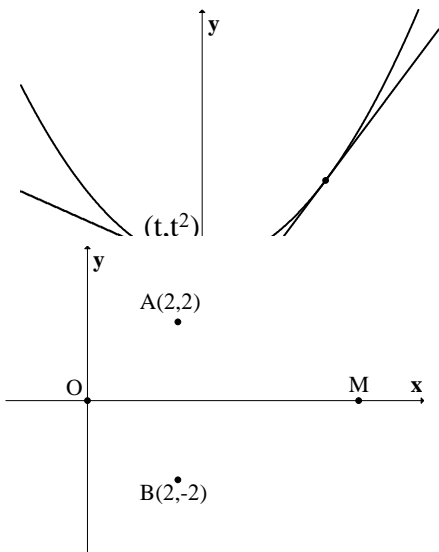
שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל

הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.

המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).

א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t.

ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



(37) במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2, 2)$ ו-

$B(2, -2)$. ראשית הצירים היא בנקודה M. O היא

נקודה על ציר ה-x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות

שיעורי הנקודה M, כדי שהסכום: $MA + MB + OM$

יהיה מינימלי?

פתרונות

- (1) $AE = 1.7_{cm}$. א. (2) $(30-x)$. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$. (3) $x = 3.75_{cm}$.
- (4) $AC = BC = 4_{cm}$. (5) $AB = 2\sqrt{32}_{cm}$. (6) $B = 6_{cm}, BC = 24_{cm}$. (7) אורך: 40 ס"מ
- רוחב: 15 ס"מ. (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$. ב. 1. $x = 3$. ב. 2. 9 סמ"ר. (9) $AM = 5/\sqrt{2}$.
- (10) בסיס קטן R . (11) $4\sqrt{5}_{cm}$. (12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר. (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.
- (14) $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$. (15) 4 ס"מ. (16) 4 ס"מ. (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5
- ס"מ. (18) 120 ס"מ. א. (19) $x = \frac{1}{12}a, y = \frac{1}{6}a$. ב. $x = y = \frac{1}{9}a$. (20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.
- (21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק. (22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ. (24) 403.1 סמ"ק.
- (25) א. $A(3,6)$. ב. $A(0,0)$ או $A(5,5)$. (26) $CD = 2\sqrt{3}$. (27) א. $A(1,8)$. ב. 32 .
- (28) א. $AB = 4$. ב. $S_{\Delta AOB} = 16$. (29) א. $x = 1$. ב. אין. (30) $PQ = 4$.
- (31) $M(4,2)$. (32) $(1.5, 0.5)$. (33) 8 . (34) $(0.5, 0.75)$.
- (35) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$. ב. 4.25 . (36) א. $y = 2t \cdot x - t^2$. ב. $t = -3/37$.
- (37) $M(0.845, 0)$.

פרק 10 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x + 1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) \qquad \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36) \qquad \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) \qquad \int \cos 4x dx \quad (34)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 11 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.
* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 12 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int x \cos 2x dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7) \qquad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x \quad (10) \qquad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16) \qquad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \qquad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 13 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9)$$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12)$$

$$\int x^3 (3x^2 - 1)^{14} dx \quad (11)$$

$$\int \cos(x^2 + 1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 2} \quad (15)$$

$$\int \ln^3 x dx \quad (14)$$

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20)$$

$$\int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23)$$

$$\int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

הערה: בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 14 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (11)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (21)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 15 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות

טריגונומטריות)

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3) \quad \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2) \quad \int (\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3}) dx \quad (1)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6) \quad \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5) \quad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9) \quad \int \tan^2 x dx \quad (8) \quad \int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12) \quad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11) \quad \int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15) \quad \int \sin^2 4x dx \quad (14) \quad \int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad (18) \quad \int \cos^4 x dx \quad (17) \quad \int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21) \quad \int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20) \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24) \quad \int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23) \quad \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

זכור :

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t) (-dt)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \cos^3 x dx \quad (3) \quad \int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2) \quad \int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6) \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5) \quad \int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9) \quad \int \tan^5 x dx \quad (8) \quad \int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12) \quad \int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11) \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

זכור :

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$
$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$
$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

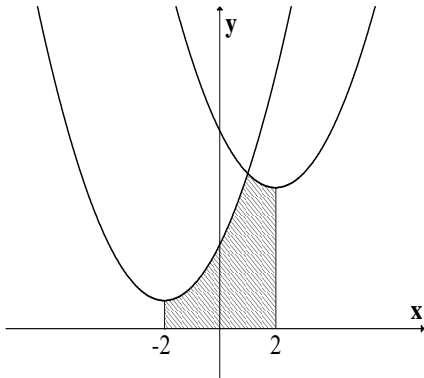
$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 16 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

חישוב שטחים



(1) נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

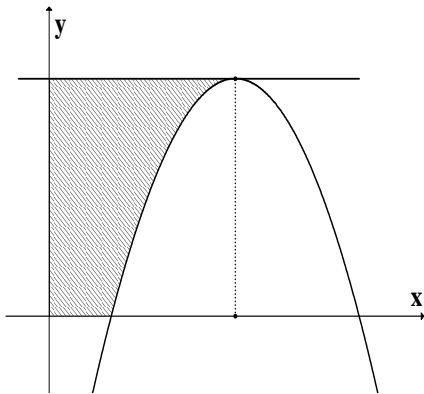
א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

$$x = -2 \text{ ו- } x = 2 \text{ (השטח המקווקו בציור).}$$

(2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).



א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

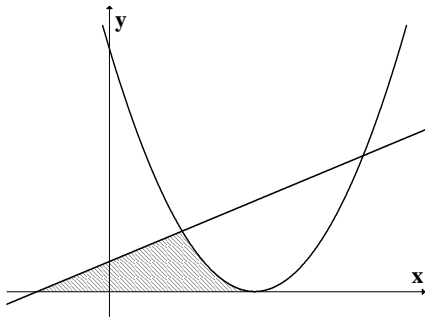
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



(3)

נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון הישר

$y = 0.5x + 0.5$ (ראה ציור). מצא את השטח

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציור).

(4) נתונות הפונקציות :

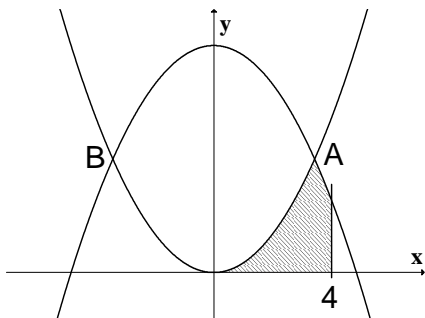
$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B

B

(ראה ציור).



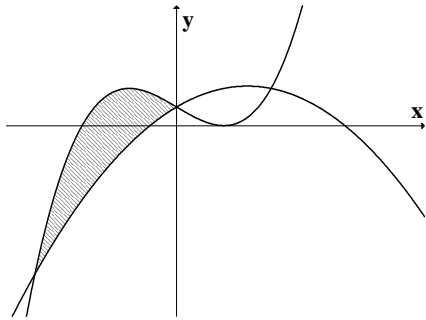
א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל

ידי הישר $x = 4$.

(5) נתונות שתי פונקציות:



$$y = -x^2 + 3x + 2$$

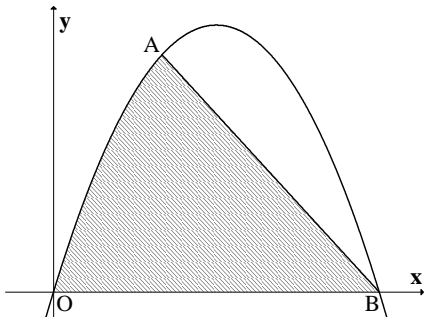
$$y = x^3 - 3x + 2$$

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין

הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציר.

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה $O(0,0)$

ובנקודה B . מצא את שיעורי הנקודה B .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

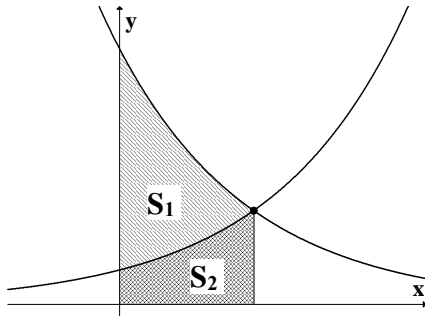
הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה- x .

(7) בציר שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x) = e^{-x+2}$$

$$g(x) = e^x$$

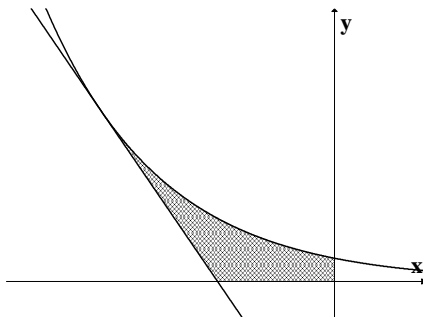


א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות עם ציר y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{-2x}$.



העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

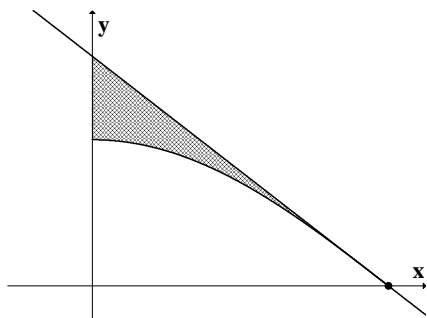
$$x = -1 \text{ (ראה ציור).}$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).



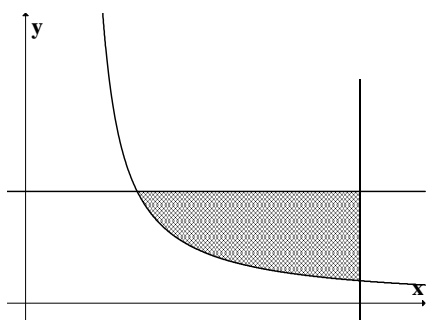
(9) נתונה הפונקציה $y = \cos 2x$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
(ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



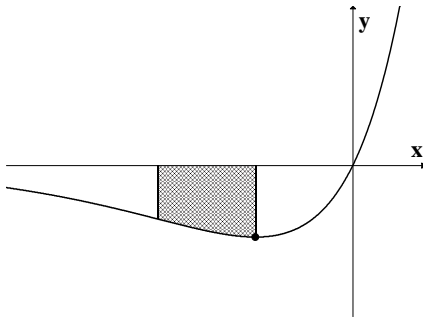
(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{2x-1} \text{ ועל ידי הישרים } x = 3 \text{ ו- } y = 1$$

(השטח המקווקו בציור).

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^x$.

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך

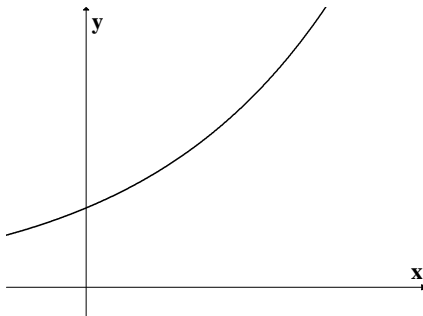
לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל

ידי הישר $x=a$, שווה ל- $3e^{2a} - e^a$, כאשר

$a < \ln 0.5$. מצא את הערך של a .

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).



שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, הוא

$$\frac{e^2}{2}.$$

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

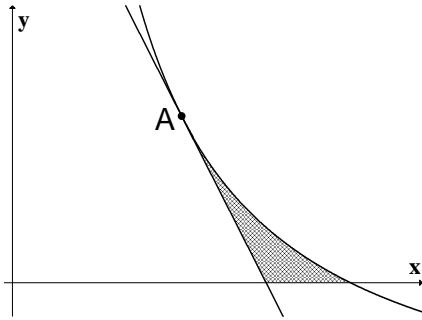
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(13)



נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{8}{x} - 2$ בתחום $x > 0$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2, 2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \sin x ; 0 \leq x \leq \pi$$

$$g(x) = \cos 2x ; 0 \leq x \leq \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15)

נתונה הפונקציה $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y = x^2 - 10x + 25$.

א. מצא את משוואות המשיקים.

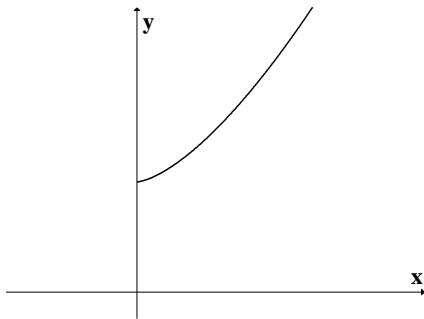
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ בתחום

$$x \geq 0$$

(ראה ציור)



א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה

$(0,0)$ ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y = \cos^2 x \cdot \sin x$

$$\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

בתחום

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2} dx$. ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$.

חישוב אורך עקום (קשת)

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

$$(1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3) \quad (1 \leq x \leq 8) y = x^{2/3} \quad (2) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8) x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{1}{3} \sqrt{x}(3-x) \quad (5) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2) y = x^2 \quad (9) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \ln x \quad (8) \quad (0 \leq y \leq 4) x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

פרק 17 – שימושי הנגזרת

תרגילים:

גמישות הביקוש

(1) חשב את גמישות הביקוש של הפונקציות הבאות:
 1) $f(x) = x^2 + 4x$, 2) $f(x) = xe^x$, 3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, 4) $f(x) = \ln(\ln x)$

(2) פונקציית הביקוש נתונה על ידי: $D(p) = 10 - p$.
 מצא את גמישות הביקוש, אם $p = 4$.

(3) פונקציית הביקוש נתונה על ידי: $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$.
 א. מצא את המחיר p בו $\eta_D = 0$.
 ב. מצא את המחיר p בו $\eta_D = -1$.

(4) פונקציית הביקוש נתונה על ידי $x = a \cdot \sqrt{b - p}$, כאשר x - כמות, p - מחיר,
 $a, b > 0$ קבועים.
 מצא את x ו- p עבורם גמישות הביקוש שווה -1.

(5) הוכח כי $\eta_{\ln f} = \frac{\eta_f}{\ln f(x)}$.

בעיות קיצון כלכליות

(6) כאשר חברת "יטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של
 $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.
 א. מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
 ב. מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
 ג. מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ש"ח לליטר?
 ד. שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
 ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.

- (7) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.
- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
 - אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
 - אם המחיר הוא 12₪, מהו הפדיון?

- (8) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.
- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
 - שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
 - מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

- (9) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$ שקל ליחידה.
- מצא את תחום הפונקציה.
 - מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הממוצע.
 - מצא את פונקציית הפדיון השולי.
 - לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?

- (10) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.
- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
 - אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
 - מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

- (11) פונקציית הביקוש למוצר מסוים נתונה על ידי: $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.
- מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
 - מהו הביקוש במקרה זה?
 - מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

- (12) פונקציית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא $C(x) = 5x + 150$.
- שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 - מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הן 1000₪.
 - מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
 - מצא את פונקציית ההוצאה השולית.

- פונקציית העלות של יצרן כובעים היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.
- חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
 - כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 - חשב את העלות השולית ליום עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

14) פונקציית העלות של מוצר מסויים היא: $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- חשב את העלות כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- חשב את העלות השולית כאשר $x = 100$?
- חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$.
- השווה עם התוצאה של סעיף ב'. מהי המסקנה?
- מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

15) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ופונקציית עלות כוללת

$$TC(Q) = 200 + 4Q$$

- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.
מהו המקסימום במקרה זה?

16) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$ ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.
מהו המקסימום במקרה זה?

17) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$ ופונקציית עלות שולית

$$MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$$

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

18) ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$

- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

19) ליצרן פונקציית עלות $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מצא את פונקציית העלות אם ידוע

- שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$ אז העלות הכוללת היא 225₪.

20) פתור את הסעיפים הבאים:

- הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.
הסבר את המשמעות הגרפית.
- הוכח שאם המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

21) $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

- א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
 ב. האם ייתכן להיפך?
 ג. הוכח, אם ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה, ואם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

22) מפעל המייצר מוצר מסויים משתמש בשני גורמי ייצור. נסמן את מחירי גורמי הייצור ליחידה ב- p_1 וב- p_2 בהתאמה. אם משתמשים ב- x יחידות מג"י 1 וב- y יחידות מג"י 2, המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות.

תקציב המפעל A ש"ח. א. הוכח כי באילוץ התקציב, הייצור המקסימלי כאשר מתקיימת הנוסחה

$$\frac{x}{y} = \frac{P_2^2}{P_1^2}$$

ב. חשב x ו- y עבורם יהיה הייצור מקסימלי אם נתון $A = 372000$, $P_2 = 100$, $P_1 = 3000$.

בעיות קיצון מסוגים שונים

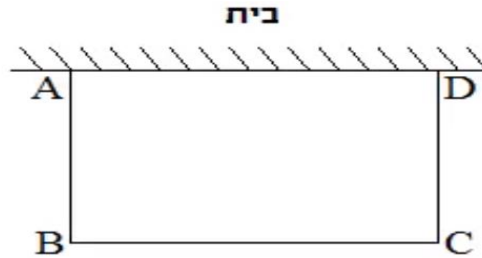
23) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים או ידוע שמכפלתם מקסימלית.

24) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

25) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלית.

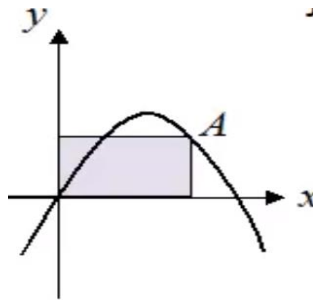
26) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k , מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.

27) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצידי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות מימדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



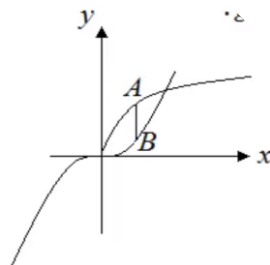
28) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה, דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדית והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

29) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



30) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



31 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

32 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$. מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון,

שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

$$\cdot \frac{1}{\ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (1)$$

$$\cdot -\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\cdot p = \frac{a}{2b} \quad \text{ב.} \quad \cdot p = 0 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\cdot p = \frac{2b}{3}, \quad x = a\sqrt{\frac{b}{3}} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

$$x \geq 0 \quad \text{ד.} \quad 16 \quad \text{ג.} \quad 7 \quad \text{ב.} \quad 9 \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\cdot x(p) = 40 - 4p \quad \text{ה.}$$

$$\cdot p(20) = 108, \quad R(20) = 2160 \quad \text{ב.} \quad \cdot R(x) = -0.6x^2 + 120x \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\cdot x = 180, \quad R(180) = 2160 \quad \text{ג.}$$

$$\cdot p(x) = -0.08x + 40 \quad \text{ג.} \quad \cdot x \geq 0 \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\cdot R(x) = -0.04x^2 + 100x, \quad AR(x) = -0.4x + 100 \quad x > 0 \quad \text{ב.} \quad \cdot x \geq 0 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\cdot x = 1250, \quad R_{Max} = 62500 \quad \text{ד.} \quad \cdot R'(x) = -0.08x + 100 \quad \text{ג.}$$

$$\cdot x = 30, \quad R_{Max} = 108000 \quad \text{ג.} \quad \text{ב.לא} \quad \cdot R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$\cdot R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$$

$$\cdot Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{\left(33\frac{1}{3}\right)^2}{5} \quad \text{ב.} \quad \cdot 33\frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$Q'\left(33\frac{1}{3}\right) = -3\frac{1}{3}$$

$$\cdot C(x) = 5x + 150 \quad \text{ד.} \quad \cdot C(20) = 250 \quad \text{ג.} \quad \cdot x = 170 \quad \text{ב.} \quad (12)$$

$$\cdot TC(100) = 18 \quad \text{ג.} \quad \cdot x = 100 \quad \text{ב.} \quad \cdot AC(40) = 21.6 \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$\text{ד.גדל} \quad \cdot C'(100) = 10.8 \quad \text{ב.} \quad \cdot C(100) = 1240 \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\cdot C(101) = 1250.804$$

$$\cdot Q = 800, \pi_{Max} = 38200 \quad (15)$$

$$\cdot Q = 5, \pi_{Max} = -250 \quad (16)$$

$$\cdot Q = 25 \quad (17)$$

$$\cdot Q = 800, \pi_{Max} = 38200 \quad (18)$$

$$\cdot TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (19)$$

(20) שאלת הוכחה

(21) א. כן ב. לא ג. שאלת הוכחה

(22) א. שאלת הוכחה ב. $x = 4, y = 3600$

(23) 8,8,8

(24) 8 יחידות אורך

(25) $4 \times 4 \times 4$

(26) $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח.

(27) 4×6 מ"ר.

(28) $3 \times 6 \times 8$ ס"מ.

(29) $A(4,8)$

(30) $A(1,2)$

(31) 1×2

(32) $A\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

פרק 18 – מטריצות

שאלות:

(1) פתור את המטריצות הבאות:

$$.E + D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} .א$$

$$.E - D + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .ב$$

$$.5C = 5 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} .ג$$

$$.2D + 4EI_3 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .ד$$

$$.I_2 \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} .ה$$

$$.D \cdot A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} .ו$$

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , x ו- b המבטאות את מערכת

המשוואות הנתונה על ידי המשוואה היחידה $Ax = b$.

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$.א. x + 2y - 4z = 5$$

$$6x + 4y + z = 2$$

3) פתור את המטריצות הבאות:

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{א.}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{ב.}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1.5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{ג.}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{ד.}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{ה.}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{ו.}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} A & I \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \text{ז.}\end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \qquad I \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ ח.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \qquad I \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ ט.} \end{array}$$

(4) הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } .AXC = D & \text{ב. } .A^{-1}XC = A^{-1}DC \\ \text{ג. } .P^{-1}X^T P = A & \text{ד. } .C^{-1}(A+X)D^{-2} = I \\ \text{ה. } .(A-AX)^{-1} = X^{-1}C & \text{ו. } .ABC^T X^{-1}BA^T C = AB^T \end{array}$$

(5) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

(6) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

(7) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

תשובות סופיות:

$$\cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix} \cdot \lambda \quad \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \cdot \beta \quad \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \alpha \quad (1)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix} \cdot \gamma \quad \cdot \begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix} \cdot \eta \quad \cdot \begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \delta$$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \alpha \quad (2)$$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \beta$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \lambda \quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \alpha \quad (3)$$

$I \quad A^{-1}$ $I \quad A^{-1}$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$I \quad A^{-1}$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \eta$$

$I \quad A^{-1}$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \delta$$

$I \quad A^{-1}$

$$\cdot \begin{pmatrix} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \zeta$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma$$

$I \quad A^{-1}$

$$\begin{array}{l}
 \text{ט.} \\
 \text{נ.}
 \end{array}
 \cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -10 & -20 & 4 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 6 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 8 & -2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 & 1
 \end{array} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 3 & -5 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & 3 & -4 & 1.5 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 & -1
 \end{array} \right)$$

$$\text{ז.} \quad X = (P^{-1})^T A^T P^T \cdot \lambda \quad \text{ח.} \quad X = D \quad \text{ט.} \quad X = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1} \quad (4)$$

$$\text{י.} \quad X = (A + C^{-1})^{-1} \cdot A \quad \text{יא.} \quad X = C \cdot D^2 - A \quad \text{יב.} \quad X = B \cdot A^T \cdot C \cdot (B^T)^{-1} \cdot B \cdot C^T$$

$$X = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B = \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (7)$$

פרק 19 – מטריצות המשך

(1) נתונות מטריצות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

$$\begin{array}{llllll} B + AB & (5) & AE - B & (4) & AC - D & (3) & AB & (2) & A + B & (1) \\ E(B - A) & (10) & E(AC) & (9) & E^T B & (8) & (E + A^T)D & (7) & E(B + A) & (6) \end{array}$$

(2) מצא את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

$$\begin{array}{llllll} 2tr(D^2 - 2E) & (5) & 2D + 4EI_3 & (4) & 5C & (3) & E - D + I_3 & (2) & E + D & (1) \\ DABC & (10) & tr(C^T C) & (9) & I_2 BC & (8) & \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C & (7) & 4C^T + A & (6) \end{array}$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , \underline{x} ו- \underline{b} המבטאות את מערכת המשוואות

הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$.

$$\begin{array}{ll} 2x - 3y + z + t = 1 & (2) \quad 2x + y - z = 3 & (1) \\ 4x + y + 2z = 4 & & x + 2y - 4z = 5 \\ y + z + t = 1 & & 6x + 4y + z = 2 \\ x - 4z - 2y = 10 & & \end{array}$$

(5) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות:

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (5) \quad A\underline{x} = \underline{x} \quad (4) \quad A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \quad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (2) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$. מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A - B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$. הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$$

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z + 4t &= 1 & (2) & \quad 2x - y + z = 3 & (1) \\ x + 2y - z &= 0 & & \quad 3x - 2y + 2z = 5 \\ y + z + t &= 1 & & \quad 5x - 3y + 4z = 11 \\ x + 3y - z - 2t &= 0 & & & \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

$$\begin{aligned} P^{-1}X^T P &= A & (3) & \quad A^{-1}XC = A^{-1}DC & (2) & \quad AXC = D & (1) \\ ABC^T X^{-1}BA^T C &= AB^T & (6) & \quad (A - AX)^{-1} = X^{-1}C & (5) & \quad C^{-1}(A + X)D^{-2} = I & (4) \end{aligned}$$

ב. נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

ג. נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

ד. נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$$

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A

ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

$$(13) \text{ נתון: } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases} \text{ הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה } D \text{ כך ש- } D^{-1}AD = C$$

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון

הוא יחס טרנזיטיבי).

הערה

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות:

$$\begin{matrix} (5 & (4 & 4 \times 2 & (3 & (2 & 4 \times 6 & (1 & (1) \\ 6 \times 6 & (10 & 6 \times 4 & (9 & (8 & 6 \times 2 & (7 & 6 \times 6 & (6 \end{matrix}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}^{(4)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}^{(7)} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}^{(6)} \quad 230 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}^{(10)} \quad 63 \quad (9)$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{matrix} (4+k)x - 2y + 4z = 1 & (3) & -2y + 4z = 1 & (2) & 4x - 2y + 4z = 1 & (1) & (5) \\ x + (k-1)y + z = 2 & & x - 5y + z = 2 & & x - y + z = 2 & & \\ x - 6y + (3+k)z = 3 & & x - 6y - z = 3 & & x - 6y + 3z = 3 & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2x + y + z = 3 & (5) & 3x - 2y + 4z = 0 & (4) \\ -2x - 3y - 6z = 6 & & x - 2y + z = 0 & \\ 4x + y + z = 9 & & x - 6y + 2z = 0 & \end{matrix}$$

1,2,3 .ג 2.ב 1,2,3 .א (6)

(7)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{(3)} & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}^{(1)} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} & \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(5)} & \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(4)} \\ & \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(9)} & \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{(7)} \end{aligned}$$

$$k = 1, k = -4 \quad (2) \quad . \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (1) \quad (8)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (2) \quad . \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1) \quad (9)$$

$$. \quad CD^2 - A \quad .4 \quad . \quad (P^{-1})^T A^T P^T \quad .3 \quad . \quad D \quad .2 \quad . \quad A^{-1}DC^{-1} \quad .1 \quad . \quad \aleph \quad (10)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad .6 \quad . \quad (A + C^{-1})^{-1} A \quad .5$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad .7 \quad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad .8 \quad X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .9$$

$$. \quad A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad .10 \quad . \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad . \aleph \quad (11)$$

$$. \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad .2 \quad , \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .1 \quad . \aleph$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad .11 \quad (12)$$

פרק 20 – בעיות גידול ודעיכה

השאלות מופיעות בספר הפרק – ניתן להוריד מעמוד הקורס.

פרק 21 – בעיות מינימום ומקסימום כלכליות

פרק 22 – גיאומטריה אנליטית – נקודה וישר

השאלות מופיעות בספר הפרק – ניתן להוריד מעמוד הקורס.

פרק 23 – גיאומטריה אנליטית - המעגל

השאלות מופיעות בספר הפרק – ניתן להוריד מעמוד הקורס.

פרק 24 – וקטורים גיאומטריים

השאלות מופיעות בספר הפרק – ניתן להוריד מעמוד הקורס.

פרק 25 – וקטורים אלגבריים

השאלות מופיעות בספר הפרק – ניתן להוריד מעמוד הקורס.

פרק 26 – פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{cccc} (1) & x + 10y = 11 & (2) & x - 4y = -7 \\ (3) & x - 4y = -7 & (4) & 2x + y = 3 \\ (1) & x + y = 3 & & 2x + y = 4 \\ & & & x - y = 0 \\ & & & x - y = -1 \\ & & & 2x - 2y = 0 \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{cccc} (1) & x + 10y = 11 & (2) & x - 4y + z = -7 \\ (3) & x - 4y + z = -7 & (4) & 2x + y + z = 3 \\ (1) & x = 3 & & 2x + y = 4 \\ & & & x - z = 0 \\ & & & x - y = -1 \\ & & & 2x - 2y = 0 \\ & & & x + y + z = 5 \\ & & & x + y = 3 \\ & & & z + t = 8 \end{array}$$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{ccc} (1) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 \\ & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 \end{array}$$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- (5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
 ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}^{(*9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה \mathbb{R} ופעם מעל השדה \mathbb{C} .

- (6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{l} 8x - 4y = 10 \\ -6x + 3y = 1 \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} 4x + 8y = 20 \\ 3x + 6y = 14 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 4y = -3 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 6y + 16z = 8 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{array} \quad (6) \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -11 \\ 2x + 3y - z = -5 \\ 3x + y - z = 2 \end{array} \quad (5) \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32 \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \\ -9x + 6y = -3 \\ 6x - 4y = 2 \end{array} \quad (9) \quad \begin{array}{l} 4x - 7y = 0 \\ 8x - 14y = 2 \\ -16x + 28y = 4 \end{array} \quad (8) \quad \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 2x + 8y + 12z = 0 \end{array} \quad (12) \quad \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \quad (11) \quad \begin{array}{l} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t = 8 \end{array} \quad (10)$$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x - y + z = 1 & (1) & x + ky + z = 1 & (2) & x + 2ky + z = 0 & (3) \\ 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 & & x + y + kz = 1 & & 3x + y + kz = 2 & \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 & & kx + y + z = 1 & & x + 9ky + 5z = -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2x - y + z = 0 & (4) & kx - y = 1 & (5) & x + ky + 3z = 2 & (6) \\ x + 2y - z = 0 & & (k - 2)x + ky = -2 & & kx - y + z = 4 & \\ 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 & & (k^2 - 1)z = 9 & & 3x + y + (2 + k)z = 0 & \end{array}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} 2x + ky = 3 & (1) & 2x - 3y + z = 1 & (2) & 3x + 4y - z = 2 & (3) \\ (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 & & 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k & & kx - 2y + z = -1 & \\ 6x + 3ky = 7k^2 + 2 & & & & x + 8y - 3z = k & \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 & & & & & \end{array}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + 2y - 4z = b & (1) & 2x + 4y + az = -1 & (2) & x + y - z + t = 1 & (3) \\ 7x - 10y + 16z = 7 & & x + 2y + 4z = -4 & & ax + y + z + t = b & \\ 2x - ay + 3z = 1 & & x + 2y - 4z = 0 & & 3x + 2y + at = 1 + a & \\ x + 2y + 6z = -2b & & & & & \end{array}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} x + az = 1 \\ y + 2z = 2 \\ bx + cy + dz = 3 \end{array}$$

א. מצא תנאי עבור a, b, c, d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b, c, d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל השדה \mathbf{F} .

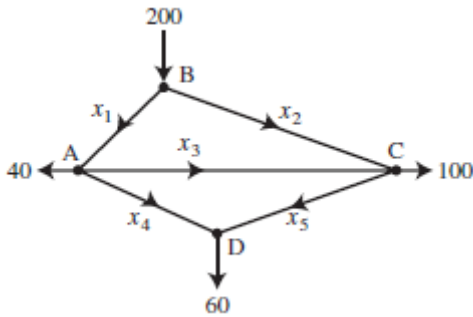
$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 & \\ 3x_1 + x_3 = 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i & (2) \\ iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i & \\ (-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{C}, \mathbf{F} = \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{Z}_5}$$

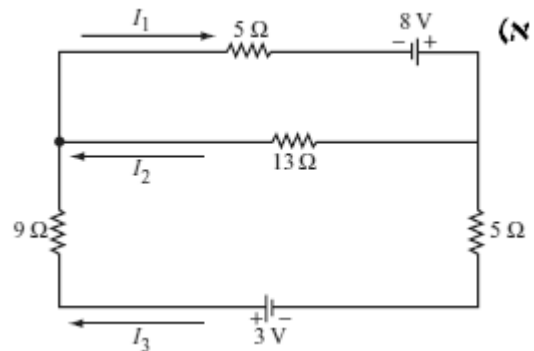
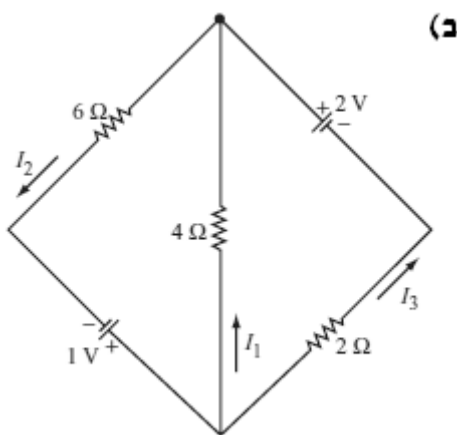
$$(12) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
 ח. מצא לאיזה ערך של k , הוא הפתרון היחיד של המערכת.



- (13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
 א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
 ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
 ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4 = 0$.

- (14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):



- * בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

תשובות:

(1) (1 ו-3) שקולות ו-2 (4 ו-1) שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad (2) \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad (2) \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad (1) \quad (4)$$

(5) ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

(6)

$$(x, y) = (5 - 2t, t) \quad (2)$$

$$\phi \quad (4)$$

$$(x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (6)$$

$$\phi \quad (8)$$

$$(x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (10)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (12)$$

$$(x, y) = (1, 2) \quad (1)$$

$$\phi \quad (3)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (5)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (7)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right) \quad (9)$$

$$\phi \quad (11)$$

א. $k = -2$ ב. $k \neq 1, k \neq -2$ ג. $k = -2$ ד. $k = 1$ ה. $k \neq 1, k \neq -2$ ו. $k = 1$ (7)

א. $k = 1, k = -0.4$ ב. $k \neq 1, k \neq -0.4$ ג. $k = -1$ ד. $k = \frac{4}{7}$ ה. $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$ ו. $k = 1$ (4)

א. $k = \pm 1, k = -2$ ב. $k \neq \pm 1, k \neq -2$ ג. $k = \pm 1, k = -2$ ד. $k \neq \pm 1, k \neq -2$ (5)

א. $k = -1, k = -3, k = 2$ ב. $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$ ג. $k = -1, k = -3, k = 2$ ד. $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$ (6)

$$k=1 \text{ ב. } k \neq 1 \text{ א. (3) } \quad k \neq 3 \text{ ג. } k=3 \text{ ב. (2) } \quad k=1 \text{ ג. } k \neq \pm 1 \text{ ב. } k=-1 \text{ א. (1) (8)}$$

(9)

$$. a=2, b=-3 \text{ ג. } a=2, b \neq -3 \text{ ב. } a \neq 2 \text{ א. (1)}$$

$$. a=-6, b=2.5 \text{ ג. } a \neq -6 \text{ או } b \neq 2.5 \text{ ב. (2)}$$

$$. a \neq 2 \text{ או } a=2, b=2 \text{ ג. } a=2, b \neq 2 \text{ ב. (3)}$$

$$b=0, c=1.5, d=3 \text{ ב. } ab+2c \neq d \text{ א. (10)}$$

(11)

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1), \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1+i, 3t) \quad (2) \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0) \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix} \text{ א. (12)}$$

$$k=2 \text{ ב. } k=-1 \text{ א. } k \neq 2, k \neq -1 \text{ ג. } k \neq 2, k \neq -1 \text{ ד.}$$

$$(x, y, z) = (1+0.2t, 0.8t, t) \text{ ז.}$$

$$k=-2 \text{ ח. } k=2 \text{ ט. } k=-2 \text{ י. } k=\pm 2 \text{ יא.}$$

$$. x_4 = 60 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x_1 = 100 + x_3 - x_5 \text{ חופשיים } x_5 \text{ ו- } x_3 \text{ א. (13)}$$

$$. x_5 = 60, x_4 = 0, x_2 = 160 - x_3, x_1 = 40 + x_3 \text{ חופשי } x_3 \text{ ב.}$$

ג. 40

$$I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11} \text{ ב. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317} \text{ א. (14)}$$

פרק 27 – דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \text{ . חישוב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{ב. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5) \quad a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

* בסעיף 7: א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1} APQ = B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

$$ד. הוכח: 1. |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad 2. |adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$$

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, מצא את n .

$$ז. נתונים: $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$, $\det(A_{n \times n}) = 2$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3} B^{-n} A^{2n}\right)$.$$

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 & \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & & \\ 2x + 5y + 44z = 51 & & & & & \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} kx + y + z + t + r = 1 \\ x + ky + z + t + r = 1 \\ x + y + kz + t + r = 1 \\ x + y + z + kt + r = 1 \\ x + y + z + t + kr = 1 \end{array}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1) $(adjA)_{1,5}$ (2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: (1) $C+D$ (2) $A+B$ (3) AD (4) CD (5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בטרמיננטות.

תשובות:

9 (10) $ad - bc$ (1) (1) .29 (2) .-1 (3) .-1 (4) .-1 (5) .-3 (6) .-14 (7) .24 (8) .234 (9) .-300 (10)

6 (11) .6 (1) (2) .0 (2) .0 (3) .3 (4) .24 (5) .44 (6) .104 (7) (3) (1) .120 (2) .114 (3) .6

(5) (1) .-8 (2) .16 (3) .9 (7) (1) $n!$ (2) $(-1)^{n-1} n!$ (3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

(4) $2 \cdot 3^{n-2}$ (6) .1 (5) $(a-b)^{n-1} [a+(n-1)b]$

(7) $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc$, $D_3 = a^3 - 2abc$.א

ב.1. $D_n = 2^{n+1} - 1$.2. $D_{20} = 2^{21} - 1$ (8) .0 (9) (1) .4 (2) 2^{13} (3) .-8 (4) -2^{11}

(10) ב. $81/32$.ג. $|A|=18$, $|B|=-2/3$.ד. 4^n (11) (1) $x=1$, $y=2$

(2) $x=1$, $y=1$, $z=2$ (3) $x=y=z=t=1$ (12) .א $k \neq 1$, $k \neq -4$.ב. $k = -2$

ג. לא.

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(2)} \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(13)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(3)}$$

(14) (1) .240 (2) .0.5 (15) (1) לא (2) לא (3) לא (4) לא (5) כן. (16) $k = 0$

(17) א.1. .13 .א.2. .14 .ב. 22 .ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$.ד. 2

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4. \text{ חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{ב. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5) \quad a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

* בסעיף 7: א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1} APQ = B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

$$ד. הוכח: 1. |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad 2. |adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$$

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, מצא את n .

$$ז. נתונים: $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$, $\det(A_{n \times n}) = 2$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3} B^{-n} A^{2n}\right)$.$$

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 & \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & & \\ 2x + 5y + 44z = 51 & & & & & \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} kx + y + z + t + r = 1 \\ x + ky + z + t + r = 1 \\ x + y + kz + t + r = 1 \\ x + y + z + kt + r = 1 \\ x + y + z + t + kr = 1 \end{array}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1) $(adjA)_{1,5}$ (2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: (1) $C+D$ (2) $A+B$ (3) AD (4) CD (5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בטרמיננטות.

תשובות:

9 (10) $ad - bc$ (1) (1) .234 (8) .24 (7) .-14 (6) .-3 (5) .-1 (4) .-1 (3) .29 (2) .

.6 (11) .6 (1) (2) .0 (2) .0 (3) .3 (4) .24 (5) .44 (6) .104 (7) (3) .120 (1) .114 (2) .6 (3)

(5) (1) .-8 (2) .16 (3) .9 (7) (1) $n!$ (2) $(-1)^{n-1} n!$ (3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

(4) $2 \cdot 3^{n-2}$ (6) .1 (5) $(a-b)^{n-1} [a+(n-1)b]$

(7) $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc$, $D_3 = a^3 - 2abc$.א

ב.1. $D_n = 2^{n+1} - 1$.2. $D_{20} = 2^{21} - 1$ (8) .0 (9) (1) .4 (2) 2^{13} (3) .-8 (4) 2^{11} .-

(10) ב. $81/32$.ג. $|A|=18$, $|B|=-2/3$.ד. 4^n (11) (1) $x=1$, $y=2$

(2) $x=1$, $y=1$, $z=2$ (3) $x=y=z=t=1$ (12) .א $k \neq 1$, $k \neq -4$.ב. $k = -2$

ג. לא.

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(14) (1) .240 (2) .0.5 (15) (1) לא (2) לא (3) לא (4) לא (5) כן. (16) $k = 0$

(17) א.1. .13 .א.2. .14 .ב. 22 .ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$.ד. 2

פרק 28 – פונקציות בשני משתנים לכלכלנים - עקומות שוות ערך

ונגזרות חלקיות

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$ באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

$$\text{נגדיר } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ . הנח כי } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

(3)

תהי $y \geq 0, x \geq 0, u(x, y) = (x + p)(y + q)$ פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות $(1, 6), (3, 2), (0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת.

מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?

עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

נספחים - נוסחאות**נוסחאות - גבולות**

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases} \\ \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \\ \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \\ \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

